УДК 534.04: 536.12: 51-7

В. М. Журавлев, П. П. Миронов, С. В. Летуновский

ПОСТРОЕНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ И ЛОКАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ОСЦИЛЛЯТОРА С ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ ЧАСТОТОЙ[1]

Аннотация. *Актуальность и цели.* Интерес к построению моделей гармонического осциллятора связан с возможностью применения их в прикладных задачах обработки данных. Особый интерес представляет модель гармонического осциллятора с переменной частотой (модель квазигармонического осциллятора). Одним из важных достоинств такой модели является возможность использовать хорошо известные из механики математические свойства процессов колебаний гармонического осциллятора с медленно меняющейся частотой для задач обработки сигналов. Одним из таких свойств является наличие адиабатических инвариантов таких колебаний, которые позволяют получать одновременно с оценкой частоты сигнала и его амплитуду. Целью данной работы является вычисление локальной частоты и локальной амплитуды сигнала на основе модели осциллятора с флуктуирующей частотой с помощью теории адиабатических инвариантов и метода максимальной энтропии. *Материалы и методы*. Вычисление и построение огибающей и локальной частоты процесса проведено с помощью теории адиабатических инвариантов. Для решения задачи о случайном поведении процесса в рамках исследуемой модели использовалась запись исходной модели в виде уравнения Рикатти, его усреднение по ансамблю и применение метода максимальной энтропии. Для вычисления локальной частоты сигнала на практике используется процедура демодуляции, выполняемая в два этапа: выделение модуля сигнала и выполнение косинусной фильтрации с окном шириной более двух периодов основной частоты. *Результаты.* Построен метод оценивания локальной частоты сигнала на основе модели осциллятора с флуктуирующей частотой. Полностью изложена и обоснована схема вычислений, учитывающая случайный характер реальных процессов. Локальная частота определяется с помощью метода адиабатических инвариантов. Показано, что в такой модели есть необходимость корректировать вычисляемую локальную частоту сигнала, и предложен метод коррекции вычисляемой локальной частоты на основе метода максимальной энтропии. Проведены тестовые численные эксперименты. *Выводы.* Условие адиабатичности сигнала выполняется даже при достаточно быстрых, но локальных или недолговременных изменениях частоты и амплитуды квазигармонического осциллятора. Решение системы усредненных уравнений Рикатти позволяет получить полную информацию о стохастическом процессе. В модели квазигармонического сигнала есть необходимость корректировать вычисляемую локальную частоту сигнала.

Ключевые слова: модель осциллятора с флуктуирующей частотой, теория адиабатических инвариантов, метод максимальной энтропии.

---

[1] Настоящая работа выполнена в рамках федеральных целевых программ «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы», а также работ в рамках государственного задания Минобрнауки России № 2.1894.2011 и № 14.B37.21.1296, гранта для аспирантов Ульяновского государственного университета и при частичной поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00747-а, 12-01-33074-мол_а_вед).

V. M. Zhuravlev, P. P. Mironov, S. V. Letunovskiy

THE CREATION OF THE ENVELOPE AND LOCAL FREQUENCY OF STOCHASTIC PROCESS ON THE BASIS OF THE OSCILLATOR MODEL WITH FLUCTUATING FREQUENCY

Abstract. *Background*. The interest in creating models of the harmonic oscillator is connected with the possibility of their employment in the applied problems of data processing. The harmonic oscillator with variable frequency (quasi-harmonic oscillator model) is of particular interest. One of the most important advantages of this model is the ability to use well-known mathematical properties of mechanical vibration processes of the harmonic oscillator with slowly varying frequency for signal processing tasks. One of these properties is the existence of adiabatic invariants of such vibration that allow estimating signal amplitude simultaneously with the evaluation of its frequency. The aim of this work is the calculation of the local frequency of the local signal amplitude on the basis of the oscillator model based on the fluctuating frequency with the help of the theory of adiabatic invariants and the maximum entropy method. *Materials and methods*. Calculation and construction of the envelope and the local process frequency is carried out with the help of the theory of adiabatic invariants. To solve the problem of the random behavior of the process in terms of the model under study the record of the original model in the form of the Riccati equation, its ensemble averaging and application of the maximum entropy method were used. In practice to calculate the local signal frequency the two-stage demodulation procedure is used. They are singling out the signal module and implementing cosine filtration with a window width of more than two periods of the fundamental frequency. *Results*. Method for estimating the local signal frequency based on the model of an oscillator with a fluctuating frequency is worked out. The calculation scheme that takes into account the random nature of real processes is fully described and grounded. Local frequency is determined by the method of adiabatic invariants. It is shown that there is a need to adjust the computed local signal frequency in this model, and the method of adjusting the calculated local frequency on the basis of the maximum entropy method is suggested. Several test numerical experiments are conducted. *Conclusions*. The signal adiabaticity condition is satisfied even when the frequency and amplitude of the quasi-harmonic oscillator are changed fast enough, but the changes are local and temporary. The solution of the system of averaged Riccati equations allows getting complete information about the stochastic process. There is a need to adjust the computed local signal frequency in the model of quasi-harmonic signal.

Key words: model of an oscillator with a fluctuating frequency, theory of adiabatic invariants, maximum entropy method.

Введение

Методы построения нелинейных моделей волновых процессов в настоящее время представлены целым набором разнообразных методов, таких как метод обратной задачи (МОЗ), метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа (ОПКХ), которые сочетаются, как правило, с различными методами многомасштабных разложений. Эти методы предлагают различные возможности вычисления характеристик волн, имеющих существенно нелинейный характер. В связи с этим возникают задачи соотнесения построенных нелинейных моделей с экспериментальными данными. Однако современные методы анализа экспериментальных данных в форме временных рядов наблюдений, на основе которых обычно и строятся выводы о характере волновых процессов, основаны на гипотезе о линейном характере этих процессов. Так, одним из основных методов анализа колебаний и волн является цифровой спектральный анализ, который основан на представлении процесса в виде суммы (конечной или бесконечной) гармонических сигналов [1–4]. При использовании такого метода обработки экспериментальных данных выявление именно нелинейного характера процесса, если и возможно в принципе, то только на основе некоторых косвенных признаков на качественном уровне.

Одними из наиболее простых способов выявления некоторых нелинейных характеристик сигнала являются методы одновременного вычисления локальной амплитуды (огибающей) и частоты сигнала. В линейных процессах частоты отдельных составляющих сигнала не меняются. Поэтому можно ожидать, что именно «измерение» локальной частоты дает определенные сведения о нелинейном характере процесса. Задача об «измерении» локальной частоты сигнала и соответствующей локальной его амплитуды может решаться различными способами. Каждому из этих способов соответствует определенная модель процесса. Одной из таких моделей является простая модель вида [5]:

$$x(t) = A(t)\cos(i\varphi(t)), \tag{1}$$

которую мы будем называть в дальнейшем моделью квазигармонического сигнала. Для вычисления локальной частоты и амплитуды сигнала используется преобразование Гильберта процесса [2–4]. В этом случае локальной частотой сигнала считается производная фазы $\varphi(t)$ по времени: $\omega(t) = \dot{\varphi}$. Однако, несмотря на простоту и очевидность такого представления, эта модель не имеет ясной по сути физической интерпретации. Имеется ввиду то, что трудно предложить однозначный вид механической системы, в которой реализуется именно такая форма колебаний. Форма уравнений будет зависеть от вида функций $A(t)$ и $\varphi(t)$. Вместе с тем существуют и другие модели сигнала с переменной частотой, которые отражают ясные с физической точки зрения свойства процесса, хотя не имеют столь простой формы записи сигнала. Одной из таких моделей вещественного сигнала $x(t)$ является гармонический осциллятор с переменной частотой:

$$\ddot{x} + [\Omega^2(t) + \varepsilon(t)]x = 0. \tag{2}$$

Здесь именно $\Omega(t)$ следует рассматривать как локальную частоту гармонического осциллятора, а $\varepsilon(t)$ – как случайный процесс. В дальнейшем эту модель мы будем называть моделью квазигармонического осциллятора. В отличие от модели сигнала (1), модель (2) опирается на ясную физическую интерпретацию и поэтому может иметь более ясные цели своего применения в прикладных задачах обработки данных. Одним из важных достоинств такой модели является возможность использовать хорошо известные из механики математические свойства процессов колебаний гармонического осциллятора с медленно меняющейся частотой для задач обработки сигналов. Одним из таких свойств является наличие адиабатических инвариантов таких колебаний [6], которые позволяют получать одновременно с оценкой частоты сигнала и его амплитуду. В данной работе обосновывается метод оценивания локальной частоты сигнала и локальной его амплитуды на основе модели (2).

1. Адиабатическое приближение и амплитуда огибающей

Сигнал $x(t)$, являющийся решением уравнения (2), нельзя представить в виде простой аналитической зависимости от времени. Однако локальная частота присутствует в самой записи уравнения модели процесса, а локальная его амплитуда может быть вычислена на основе простой процедуры через локальную частоту при определенных условиях. Простая связь между частотой и амплитудой сигнала существует в предположении относительного медленного изменения средней частоты процесса со временем, что является по сути основным требованием, которое определяет осмысленность понятия локальной частоты для экспериментатора. В механике это условие означает возможность появления адиабатических инвариантов процесса. Теория адиабатических инвариантов изложена, в частности, в [6].

Метод адиабатических инвариантов может быть применен к колебательным гамильтоновским системам в случае, если ее некоторый параметр изменяется достаточно медленно по сравнению с периодом основных осцилляций в системе. В нашем случае модель процесса (2) представляет собой гамильтоновскую колебательную систему с изменяющейся со временем локальной собственной частотой $\Omega(t)$. В случае, если за период осцилляции, соответствующий локальной частоте $\Omega(t)$, само значение частоты не успевает сильно измениться, можно применить теорию адиабатических инвариантов. Условие адиабатичности колебаний можно в этом случае записать в нашем случае так:

$$\left| T\frac{d\Omega}{dt} \right| << \Omega, \tag{3}$$

где T – период, соответствующий частоте $\Omega(t) = 2\pi / T(t)$. Это условие должно выполняться на всем интервале времени слежения за системой.

Вообще говоря, условие адиабатичности является вполне естественным условием общего представления о существовании представлений о колебательном процессе как таковом. Без этого условия понятие локальной частоты колебаний теряет свой исходный смысл. Поэтому его можно рассматривать для большинства прикладных задач как необходимое условие для построения полезной интерпретации результатов измерений.

Предположим, что на всем интересующем нас интервале времени изменения со временем функции Ω^2 происходят медленно по сравнению с периодом основной частоты Ω_0 в соответствии с (3). Тогда согласно (3) адиабатическим инвариантом для такой системы является величина

$$I = \oint p dq, \tag{4}$$

где p – импульс системы, как функция координаты q системы, интеграл берется по периоду локальной частоты.

Для модели (2) закон сохранения энергии в предположении, что $\Omega = \mathrm{const}$, имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\Omega_0^2 x^2}{2} = E = \text{const}. \tag{5}$$

Из этого закона сохранения получаем выражение для импульса:

$$p = \sqrt{2E - \Omega_0^2 x^2}.$$

В соответствии с (4) имеем

$$I = \oint \sqrt{2E - \Omega_0^2 x^2}\, dx = \Omega_0 \oint \sqrt{A^2 - x^2}\, dx =$$

$$= -\Omega_0 A^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2\phi} \cos\phi\, d\phi = \pi \Omega_0 A^2.$$

Здесь $A = \sqrt{2E / (\Omega_0^2)}$ – амплитуда колебаний, использована подстановка $x = A \sin\phi$. Отсюда окончательно находим

$$I = A^2(t) \sqrt{\Omega^2(t)}. \tag{6}$$

Эмпирическое определение амплитуды в данной модели можно записать в следующем виде:

$$A^2(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x^2(t)\, dt,$$

где $T_0 = 2\pi / \Omega_0$ – период основной частоты. Зная величину $\Omega^2(t)$, мы получаем простой способ вычисления огибающей процесса:

$$A(t) = A(0) \left(\frac{\Omega^2(0)}{\Omega^2(t)} \right)^{1/4}. \tag{7}$$

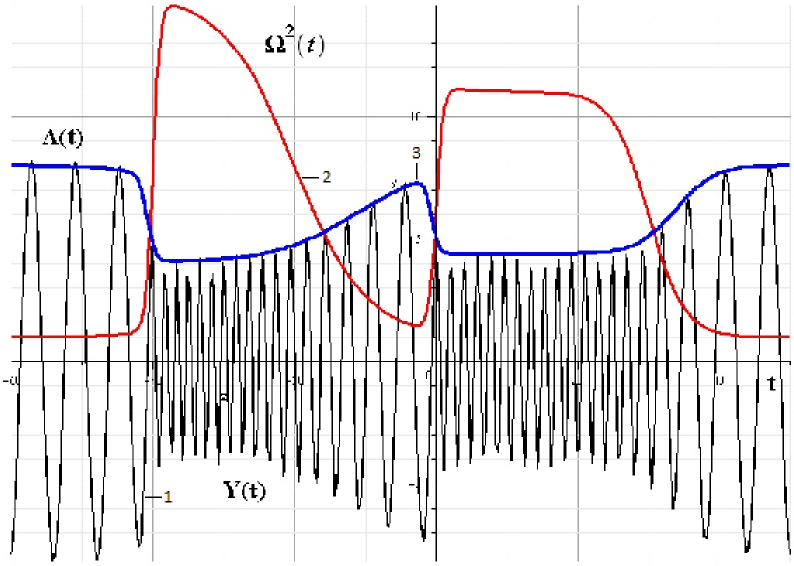
Для демонстрации эффективности такой модели на рис. 1 показаны результаты вычисления амплитуды $A(t)$ (кривая *3*) процесса $Y(t)$ (кривая *1*) с изменяющейся частотой ($\Omega^2(t)$ – кривая *2*). Рисунок 1,***а*** соответствует модели

$$\Omega\ \ (t) = 12 - 5(t) \cdot (0,2(t - 30)) = 7(t + 40)(0,1(t + 20)) + 1,0, \tag{8}$$

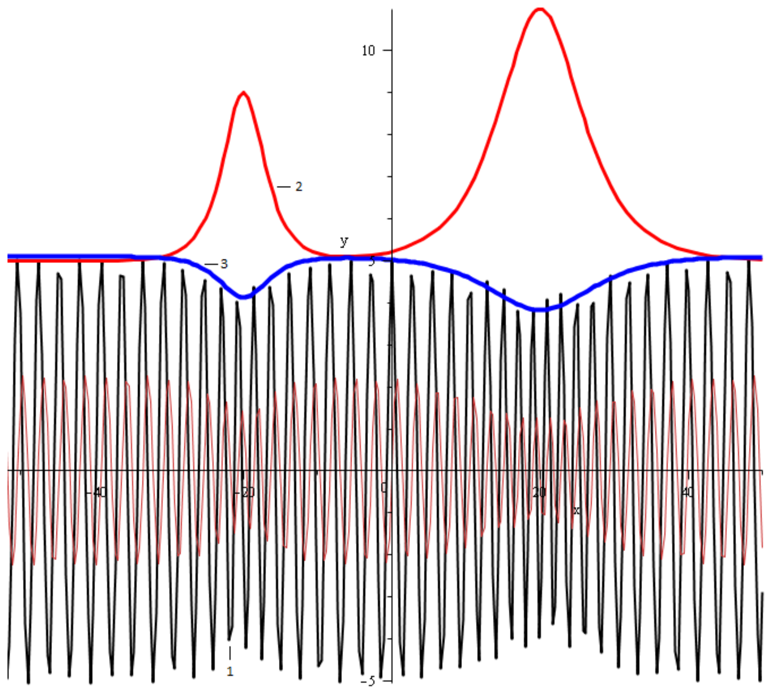
а рис. 1,***б*** – модели

$$\Omega^2(t) = 5 + 4 / \cosh(0,4(t + 20)) + 6 / \cosh(0,2(t - 20)). \tag{9}$$

Анализируя графики, нетрудно видеть, что вычисленные по формуле (7) амплитуды близки к огибающей колебаний даже в области достаточно резких изменений частоты, что говорит об устойчивости метода оценивания амплитуды сигнала с помощью данного подхода. Фактически это означает, что условие адиабатичности сигнала выполняется даже при достаточно быстрых, но локальных или недолговременных изменениях частоты и амплитуды квазигармонического осциллятора.



а)



б)

Рис. 1. Колебания осциллятора при изменении его частоты;
кривые: *1* – процесс $Y(t)$; *2* – $\Omega^2(t)$; *3* – $A(t)$

2. Статистические свойства модели

Согласно модели (2) квадрат $\Omega^2(t)$ средней частоты процесса является средним значением случайного процесса $\eta = \Omega^2(t) + \varepsilon(t)$. Для практического использования развитого метода вычисления локальной частоты в модели гармонического осциллятора необходимо выяснить статистические свойства процесса $x(t)$ при заданных свойствах процесса $\varepsilon(t)$.

Для анализа случайного поведения процесса в рамках исследуемой модели запишем уравнение (2) в виде уравнения Рикатти:

$$\frac{dz}{dt} + z^2 + \Omega^2 + \varepsilon = 0, \tag{10}$$

здесь

$$z = \frac{d \ln x}{dt}. \tag{11}$$

Поскольку мы имеем дело со случайным процессом, то представим функцию z и потенциал Ω в виде среднего его значения и шума:

$$z = Z(t) + z', \tag{12}$$

$$< z >= Z, \ < \Omega^2 > \equiv \overline{\Omega^2} = \Omega^2, \ < z' >=< \varepsilon >= 0.$$

Скобки $<>$ означают усреднение по ансамблю. Из (11) следует

$$x = \exp\left\{\int Z dt + \int z' dt\right\}.$$

Введем обозначение

$$Z = \frac{d \ln X}{dt}. \tag{13}$$

Тогда

$$x = X(t) \exp\left\{\int z' dt\right\} = X(t) \exp\{\zeta'\}, \tag{14}$$

где $\dot{\zeta}' = z'$. Функция X представляет собой амплитуду или огибающую случайного процесса $\xi' = \exp\{\zeta'\}$. С другой стороны, $X(t)$ можно рассматривать как усредненное значение наблюдаемого процесса с изменяющейся частотой.

Подставляя представление (12) в уравнение (10) и производя усреднение по ансамблю, находим

$$\dot{Z} + Z^2 + \sigma_z^2 + \overline{\Omega^2} = 0. \tag{15}$$

Учитывая (13), приходим к уравнению для X в следующем виде:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + (\sigma_z^2 + \overline{\Omega^2}) X = 0. \tag{16}$$

Отсюда видно, что для построения усредненной огибающей X необходимо, кроме усредненной суммы нулей, знать еще и дисперсию процесса z'.

Утверждение. В случае случайных флуктуаций процесса квадрат частоты усредненного по ансамблю процесса в смысле определений (12) и (13) определяется формулой

$$\Omega_X^2(t) = \sigma_z^2(t) + \overline{\Omega^2}, \tag{17}$$

где $\overline{\Omega^2}$ – усредненная частота процесса, а $\sigma_z^2(t)$ – дисперсия процесса z', определенного выше.

Это означает, что случайные флуктуации самого сигнала или погрешности вычислений приводят к смещению оценки квадрата частоты. Поскольку, как это было показано в предыдущем разделе, при вычислении оценки квадрата частоты обязательно приходится прибегать к процедуре усреднения по фазе, что фактически заменяет на практике усреднение по ансамблю, то для вычисления квадрата частоты в модели квазигармонического осциллятора усредненного процесса необходимо вычислять дисперсию случайного процесса z'. Для построения оценки дисперсии воспользуемся методом максимальной энтропии.

3. Метод максимальной энтропии

Метод максимальной энтропии опирается на предположение, что наилучшей оценкой для параметров случайного процесса в смысле максимальной его наблюдаемости является такая оценка, что его распределение обладает максимумом энтропии. Согласно теории, развитой в [7], для отыскания оптимальных параметров процесса, удовлетворяющих уравнению Рикатти (10), являются такие, которые доставляют абсолютный максимум функционалу

$$H = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \ln(\sigma_z^2(t))dt + \int_{t_1}^{t_2} u(\dot{Z} + Z^2 + \sigma_z^2 + \Omega^2)dt. \tag{18}$$

Здесь $u(t)$ – множитель Лагранжа. Варьируя эту систему по $Z(t)$, $u(t)$ и $\sigma_z^2(t)$, приходим к системе уравнений, включающей (10) и следующие уравнения:

$$-\dot{u} + 2Zu = 0, \quad \sigma_z^2 = -\frac{1}{2u}. \tag{19}$$

Исключая из этих уравнений u и σ_z^2, приходим к следующему уравнению для u:

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln u + \frac{(\dot{u})^2}{2u} + 4\Omega^2 - \frac{1}{u} = 0. \tag{20}$$

Делая подстановку $u = V^2$, получаем следующее уравнение:

$$\ddot{V} - \frac{1}{2V} + 2\Omega^2 V = 0, \tag{21}$$

Решения этого уравнения позволяют получить полную информацию о процессе. Однако на практике проще пользоваться непосредственно уравнениями (19).

4. Применение метода на практике

На практике для вычисления локальной частоты сигнала удобно использовать данные о локальной амплитуде или огибающей процесса, которые можно получить с помощью простой процедуры демодуляции [5]. В нашем случае демодуляция выполняется в два этапа. Первый – выделение модуля сигнала, второй – выполнение косинусной фильтрации с окном шириной более двух периодов основной частоты Ω_0. После этого для вычисления локальной частоты можно воспользоваться формулой (7), учитывающей наличие дисперсии шума z'. Эта формула имеет следующий вид:

$$A(t) = A(0)\left(\frac{\sigma_z^2(0) + \Omega^2(0)}{\sigma_z^2(t) + \Omega^2(t)}\right)^{1/4}. \tag{22}$$

При демонстрации эффективности данного метода для анализа был проведен численный эксперимент, в котором для процессов (8) и (9) сначала оценивалась локальная амплитуда процесса, а уже затем локальная его частота в соответствии с формулой (22). Поскольку для сгенерированных процессов по формулам (8) и (9) дисперсия шума менялась незначительно, то для получения оценок частоты для сигнала (8) полагалось, что она является постояной величиной. При этом наилучшее согласие с теоретической кривой локальной частоты получалось для (8) при $\sigma_z^2 = 1{,}1$, а для (9) – при $\sigma_z^2 = 0{,}7$. При этом стандартное отклонение по всем точкам графика для (8) было равно $\Delta = 0{,}9$, а для (9) – $\Delta = 0{,}18$. Результаты восстановления локальной частоты этих процессов представлены на рис. 2 и 3. Из графиков видно, что в случае (8) предположение о постоянстве σ_z^2 выполняется гораздо хуже, чем для (9). Для процессов с достаточно большой изменчивостью дисперсии шума z' коррекцию частоты следует проводить с помощью решения уравнения (20). Решение этого уравнения можно проводить численно.

Заключение

В работе построен метод оценивания локальной частоты сигнала на основе модели осциллятора с флуктуирующей частотой. В работе полностью изложена и обоснована схема вычислений, учитывающая случайный характер реальных процессов. Сама локальная частота определяется с помощью метода адиабатических инвариантов. В работе показано, что в такой модели есть необходимость корректировать вычисляемую локальную частоту сигнала, и предложен метод такой коррекции на основе метода максимальной энтропии.

Эффективность метода продемонстрирована с помощью тестовых численных экспериментов.

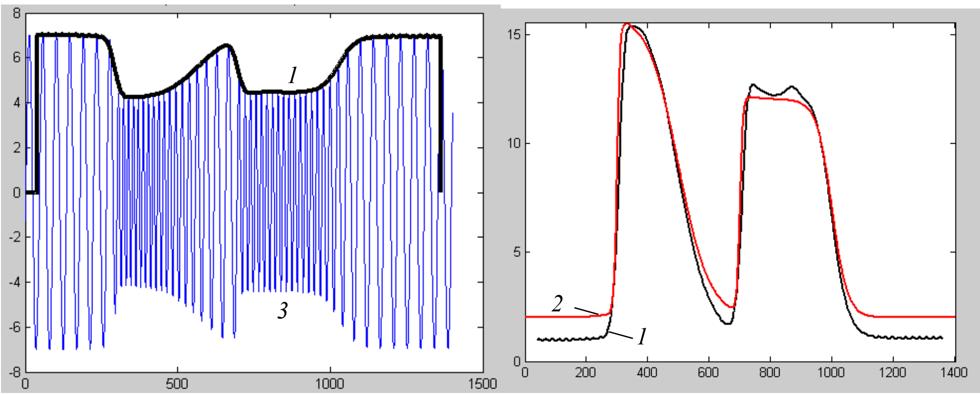


Рис. 2. Графики демодулированной амплитуды (кривая *1*) и восстановленного квадрата частоты (кривая *2*) для процесса (8) (кривая *3*)

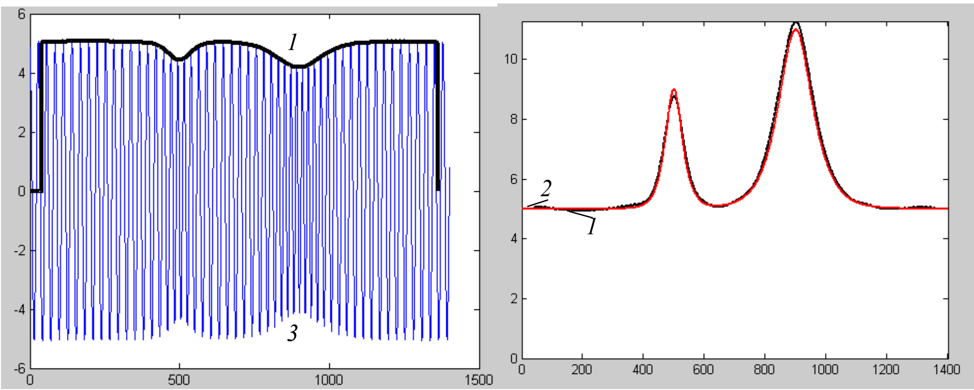


Рис. 3. Графики демодулированной амплитуды (кривая *1*) и восстановленного квадрата частоты (кривая *2*) для процесса (9) (кривая *3*)

Список литературы

1. **Марпл-мл., С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл-мл. – М. : Мир, 1990. – 584 с.
2. **Финк, Л. М.** Сигналы, помехи, ошибки / Л. М. Финк. – М. : Радио и связь, 1984. – 256 с.
3. **Баскаков, С. И.** Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / С. И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 1988. – 448 с.
4. **Бендат, Дж.** Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М. : Мир, 1989. – 540 с.
5. **Злобин, В. А.** Проблема оценки мгновенной частоты дискретного сигнала. Метод развертывания фазы дискретного сигнала / В. А. Злобин // Телекоммуникации и транспорт. – 2009. – № 4. – С. 29.
6. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 208 с.
7. **Журавлев, В. М.** Динамика случайно-возмущенной системы Вольтерра – Лотки и метод максимальной энтропии / В. М. Журавлев, П. П. Миронов // Нелинейный мир. – 2011. – Т. 9, № 4. – С. 201–212.

References

1. Marpl-ml. S. L. *Tsifrovoy spektral'nyy analiz i ego prilozheniya* [Digital spectrum analysis and application thereof]. Moscow: Mir, 1990, 584 p.
2. Fink L. M. *Signaly, pomekhi, oshibki* [Signals, noises, errors]. Moscow: Radio i svyaz', 1984, 256 p.
3. Baskakov S. I. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly: uchebnik dlya vuzov* [Radiotechnical circuits and signals: textbook for universities]. Moscow: Vysshaya shkola, 1988.
4. Bendat Dzh., Pirsol A. *Prikladnoy analiz sluchaynykh dannykh* [Applied analysis of hash]. Moscow: Mir, 1989, 540 p.
5. Zlobin V. A. *Telekommunikatsii i transport* [Telecommunication and transport]. 2009, no. 4, p. 29.
6. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoreticheskaya fizika* [Theoretical physics]. Moscow: Nauka, 1973, vol. 1, 208 p.
7. Zhuravlev V. M., Mironov P. P. *Nelineynyy mir* [Nonlinear world]. 2011, vol. 9, no. 4, pp. 201–212.

Журавлев Виктор Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Миронов Павел Павлович
аспирант, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Mironov Pavel Pavlovich
Postgraduate student, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: museum86@mail.ru

Летуновский Сергей Владимирович
младший научный сотрудник, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Letunovskiy Sergey Vladimirovich
Junior research fellow, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: grayser@bk.ru

УДК 534.04: 536.12: 51-7

Журавлев, В. М.

Построение огибающей и локальной частоты стохастического процесса на основе модели осциллятора с флуктуирующей частотой / В. М. Журавлев, П. П. Миронов, С. В. Летуновский // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 159–169.